Волна, локализованная на поверхности, распространяющаяся вдоль нее (например в направлении x) и экспоненциально спадающая в направлениях $+z$ и $-z$, будет описываться выражениями

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi, \quad \varphi = \varphi_0 \exp[i(k_x x - \omega t)] \exp(-k|z|). \tag{2.129}$$

Когда $k = k_x$, выражения (2.129) описывают поле, ротор, а также дивергенция которого равны нулю *).

Мы еще должны связать две экспоненциально спадающие части поверхностной волны посредством условия непрерывности $\mathbf{D}$ на поверхности. Это дает условие для $\varepsilon(\infty)$ и определяет частоту ω Получаем, что $\varepsilon = -1$ (см. ниже), и, следовательно, из (2.128) находим

$$\omega = \omega_T \sqrt{\frac{\varepsilon(0)+1}{\varepsilon(\infty)+1}} \qquad (\omega_T < \omega < \omega_L). \tag{2.130}$$

Таким образом, мы показали, что — в добавление либо к соленоидальным, либо к безвихревым решениям (ч. I.36.5),— еще возможны соленоидальные *и одновременно* безвихревые решения в ограниченной среде, соответствующие поверхностным возбуждениям. Для более подробного рассмотрения мы обобщим модель путем включения всех уравнений Максвелла (переход от поверхностных фононов к поверхностным поляритонам, см. ч. II, § 65) и выбором другой геометрии. Вместо полуограниченной среды мы рассмотрим пластину толщиной $2a$. Поверхности лежат в плоскости x, y при $z = \pm a$. Мы описываем среду в континуальном приближении (предельный случай длинных волн) посредством зависящей от частоты диэлектрической проницаемости (2.128).

Уравнения Максвелла, которые необходимо решить, имеют вид

$$\nabla\cdot(\varepsilon\mathbf{E}) = 0, \quad \nabla\cdot\mathbf{H} = 0, \quad \nabla\times\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\dot{\mathbf{H}}, \quad \nabla\times\dot{\mathbf{H}} = \frac{1}{c}\varepsilon\dot{\mathbf{E}}. \tag{2.131}$$

Мы ищем решения типа

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(z)\exp[i(k_x x - \omega t)], \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}(z)\exp[i(k_x x - \omega t)]. \tag{2.132}$$

Подставляя эти выражения в уравнения (2.131), после преобразований получаем

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \alpha^2 E_x, \quad \frac{\partial E_z}{\partial z} = -ik_x E_x, \tag{2.133}$$

где $\alpha^2 = k_x^2 - \varepsilon(\omega/c)^2$. Из этих уравнений следуют решения в среде:

$$E_x(z) = \exp(\alpha z) \mp \exp(-\alpha z),$$
$$E_z(z) = -i\frac{k_x}{\alpha}[\exp(\alpha z) \pm \exp(-\alpha z)], \tag{2.134}$$

*) Т. е. безвихревое и соленоидальное поле. (*Примеч. пер.*)