Вообще аналитические свойства спектральных функций и, следовательно, $G(\mathbf{k}, \omega)$ являются сложными. Вклады в $G(\mathbf{k}, \omega)$ вносят многие полюса и остающийся контур интегрирования в комплексной плоскости. Только когда преобладает вклад одного (ближайшего к действительной оси) полюса и этот полюс расположен достаточно близко около действительной оси, определение квазичастиц как элементарных возбуждений системы с взаимодействием имеет смысл.

В этом рассмотрении мы ограничились принципиальной взаимосвязью между функцией Грина и свойствами системы фермионов. Аналогичные рассуждения возможны и для бозонов. И в этом случае также приходят к времени жизни элементарных возбуждений, примерно, как это было при его введении в (ч. II. 89.6) для фононов. В отношении подробного изложения этого, как и весьма сложных методов теории возмущений для фактического расчета энергетических спектров и времени жизни в системах с взаимодействием, отсылаем к приведенной выше литературе.

Определенная в (П.7) функция Грина описывает частицу при $T = 0$ (*одночастичная функция Грина*). Наряду с этим можно определить двухчастичные функции Грина, которые нужны, например, для описания поведения систем во внешних полях. Для описания термодинамических свойств при $T \neq 0$ должны быть введены зависящие от температуры функции Грина. Все это вводится через вспомогательные средства, выходящие за рамки требующихся в этой книге.

Напротив, мы хотим подробнее изложить второй круг вопросов — о применении функций Грина для расчета энергетического спектра невзаимодействующих фермионов в заданном, не зависящем от времени потенциале. Для периодического потенциала этот вопрос детально обсуждался в гл. IV ч. I.

Исходим из уравнения Шредингера

$$H\varphi(\mathbf{r}, t) \equiv \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\mathbf{r})\right]\varphi(\mathbf{r}, t) = -\frac{\hbar}{i}\dot{\varphi}(\mathbf{r}, t). \qquad (\text{П.33})$$

Так как H не зависит от времени, выражение $\varphi_n(\mathbf{r}, t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_n t\right)\varphi_n(\mathbf{r})$ приводит к

$$H\varphi_n(\mathbf{r}) = E_n\varphi_n(\mathbf{r}). \qquad (\text{П.34})$$

С φ_n образуем зависящие от времени операторы поля в представлении Гейзенберга:

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}, t) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}Ht\right)\sum_n \varphi_n(\mathbf{r})\, c_n \exp\left(-\frac{i}{\hbar}Ht\right). \qquad (\text{П.35})$$

При определении функции Грина принимаем во внимание, что, как и ранее, G может зависеть только от разности времен $t_1 - t_2$. Напротив, вследствие отсутствия пространственной трансляционной инвариантности H, $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ остаются независимыми друг от друга.

Полагаем $t_1 = t$ и $t_2 = 0$. Тогда с аргументацией, подобной использованной при выводе (П.20), находим из (П.7)

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) = -i\sum_n \varphi_n(\mathbf{r}_1)\,\varphi_n^*(\mathbf{r}_2)\,\theta(t)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_n t\right), \qquad t > 0, \quad (\text{П.36})$$

и соответствующее выражение для $t < 0$. Для дальнейшего обсуждения целесообразно раздельно определить функции для $t > 0$ и $t < 0$ (G_+ и G_-) и