ЗАДАЧИ

К главе I ч. I

1. а) Покажите, что вариация $\langle\delta\Phi|H|\Phi\rangle = 0$, где

$$H = \sum_{\lambda\lambda'} \langle\lambda'|h^{(1)}|\lambda\rangle c^+_{\lambda'}c_\lambda + \frac{1}{2}\sum_{\lambda\lambda'\mu\mu'}\langle\lambda'\mu'|h^{(2)}|\lambda\mu\rangle c^+_{\lambda'}c^+_{\mu'}c_\mu c_\lambda$$

[(ч. I, II. А.31) и (ч. I, II. А.33) для фермионов], ведет к уравнению

$$\langle\lambda'|h^{(1)}|\mu\rangle + \sum_\nu (\langle\lambda\nu|h^{(2)}|\mu\nu\rangle - \langle\lambda\nu|h^{(2)}|\nu\mu\rangle) = 0,$$

где $|\mu\rangle$ — заполненное и $|\lambda\rangle$ — незаполненное состояния и где сумма берется по всем заполненным состояниям.

б) Обсудите свойства «самосогласованного одночастичного гамильтониана»

$$H^{sc} = \sum_{\lambda\mu}\Big(\langle\lambda|h^{(1)}|\mu\rangle + \sum_\nu (\langle\lambda\nu|h^{(2)}|\mu\nu\rangle - \langle\lambda\mu|h^{(2)}|\nu\mu\rangle)\Big),$$

где нет ограничений относительно $|\mu\rangle$ и $|\lambda\rangle$. В частности, покажите, что все матричные элементы между заполненными и незаполненными состояниями равны нулю.

в) Используйте результаты из а) и б), чтобы получить уравнения Хартри — Фока в представлении чисел заполнения из (ч. I.3.1).

2. а) Обсудите обменное взаимодействие на простом примере системы, состоящей из двух тождественных частиц. Гамильтониан есть $H = H_1 + H_2 + H_{12}$, $H_1 = h(r_1)$, $H_2 = h(r_2)$, $H_{12}(r_1, r_2) = H_{12}(r_2, r_1)$. Рассматривайте взаимодействие в качестве возмущения.

б) Пусть в момент времени $t = 0$ две частицы находятся в состоянии $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, 0) = \psi_i(\mathbf{r}_1)\psi_k(\mathbf{r}_2)$, где ψ_n определяется $H\psi_n = E_n\psi_n$. Обсудите временную зависимость $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t)$.

в) Обсудите трехчастичный гамильтониан $H = H_1 + H_2 + H_3 + H_{12} + H_{23} + H_{31}$. В какой мере могут быть выполнены расчеты аналогично а)? Какие возникают трудности?

К главам II, IV ч. I

1. а) Каким образом устанавливается связь между свободной энергией F, термодинамическим потенциалом Ω, энтропией S газа свободных электронов и его полной энергией U?

б) Вычислите следующие параметры газа свободных электронов как функцию концентрации электронов и объема при $T = 0$:

$$k_F,\ E_F,\ v_F,\ U,\ F,\ \Omega,\ S.$$

в) Для $T = 0$ функция распределения Ферми есть ступенчатая функция. Отсюда поэтому следует, что

$$\int_0^\infty F(E) f_0(E) g(E)\, dE = \int_0^{E_F} F(E) g(E)\, dE.$$