Вычислите поправку первого порядка к этому соотношению для $T \neq 0$ и используйте этот результат, чтобы определить температурную зависимость μ, $U = N\bar{E}$ [(ч. I. 6.10)], F, Ω и S при низких температурах.

2. Определите плотность состояний $g(E)$, энергию Ферми E_F и среднюю энергию $\bar{E}(T = 0)$ для одномерного и двумерного электронного газа.

3. Выражение для намагниченности, приведенное в (ч. I. 9.2), следует из (ч. I. 9.1) после утомительного вычисления. Чтобы воспроизвести выкладки, воспользуйтесь работой Вильсона [34]. Вывод первых двух членов в (ч. I. 9.2) сравнительно простой. Парамагнетизм Паули (первый член): используйте ч. I. рис. 10, чтобы вычислить вклад электронов в намагниченность.

Диамагнетизм Ландау (второй член): вычислите среднюю энергию $\bar{E}$, используя плотность состояний (ч. I. 8.16), и из нее намагниченность. (Указание: для слабых магнитных полей применима следующая аппроксимация:
$\sum_{n=0}^{\infty} F\left(n + \frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} F(x)\,dx - \frac{1}{24}\left.\frac{dF(x)}{dx}\right|_0^{\infty}\Bigg)$. Как устанавливается связь между множителем перед скобками в (ч. I. 9.2) и плотностью состояний $g(E_F)$ на поверхности Ферми?

4. Симметрия простой кубической решетки (ячейка Вигнера — Зейтца: ч. I, рис. 18, *а*, зона Бриллюэна: ч. I, рис. 28, *а*).

а) Определите элементы пространственной группы и точечной группы.

б) К каким классам можно свести точечную группу (группа вектора $\mathbf{k} = 0$)? Какие размерности имеют неприводимые представления?

в) Какие элементы, классы и неприводимые представления имеет группа вектора $\mathbf{k} = (k_x, 0, 0)$ (точка на Δ-оси зоны Бриллюэна)?

г) Какие элементы, классы и неприводимые представления имеет группа вектора $\mathbf{k} = (\pi/a, 0, 0)$ (точка X на поверхности зоны Бриллюэна)?

д) Какие утверждения могут быть сделаны из результатов пунктов а) — г) относительно возможного вырождения и связей между зонами вдоль Δ-оси?

5. а) Рассчитайте пять наинизших зон «свободных электронов» вдоль Δ-оси в зоне Бриллюэна для простой кубической решетки (аналогично ч. I, рис. 41). Вычислите соответствующие собственные функции.

б) Для зон, которые вырождены вдоль Δ-оси (или на Γ, или на X) сконструируйте линейные комбинации из волновых функций таким образом, чтобы новые функции либо были инвариантны относительно группы операций, либо уменьшали множество функций, которые преобразуются одна через другую. Такие множества образуют базисные функции неприводимых представлений группы вектора $\mathbf{k}$.

6. В окрестности экстремумов и седловых точек зоны зонная структура функции $E_n(\mathbf{k})$ может быть описана в виде

$$E_n(\mathbf{k}) = E_0(\mathbf{k}_0) + \sum_i a_i (k_i - k_{0i})^2.$$

В таких *критических точках* существует сингулярность в плотности состояний, стоящей под интегралом в (ч. I. 22.4).

а) Покажите, что существует разрыв в dg/dE («излом» в плотности состояний) в этих точках.

б) Какие типы критических точек возникают в одно-, двух- и трехмерном случае? Как ведет себя $g(E)$ вблизи $g(E_0)$ (ср. ч. II, рис. 68)?

Критические точки в плотности состояний являются источниками характеристической структуры в спектре поглощения полупроводников (см. ч. II, § 68).

7. Пусть известны функции $E_n(\mathbf{k})$ и $\psi_n(\mathbf{k}, \mathbf{r})$ для $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$. Используя уравнение Шредингера для $u_n(\mathbf{k}, \mathbf{r})$, можно развить метод возмущений, чтобы определить $E_n(\mathbf{k})$ в окрестности $\mathbf{k}_0$ ($\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}$-метод).