Подстановка этого выражения в (2.20) дает следующее секулярное уравнение для λ:

$$\lambda^2 + 1 + \left(\frac{4\omega^2}{\omega_0^2} - 2\right)\lambda = 0. \tag{2.22}$$

Для неискаженной решетки возможны лишь решения с $\omega < \omega_0$. Тогда λ становится комплексным. Если записать λ в виде $\exp(i\alpha)$, находим, что решения уравнения движения представляют собой плоские волны с частотами ω, связанными посредством (2.18) с $\alpha = qa$.

Для возмущенной цепочки ограничиваемся также сначала областью $\omega < \omega_0$. Всегда можно построить общее решение из двух стоячих волн: одной симметричной ($s_n = s_{-n}$), а другой антисимметричной ($s_n = -s_{-n}$). Во втором случае возмущающий атом при $n = 0$ покоится. Эта часть не изменяется возмущением. Рассматриваем, следовательно, решения с $s_n = s_{-n}$. Для них можно записать

$$s_n = A\exp(iqa|n|) + B\exp(-iqa|n|). \tag{2.23}$$

Первое из уравнений (2.20) принимает тогда вид

$$\frac{A\exp(iqa) + B\exp(-iqa)}{A+B} + \left[\frac{2\omega^2}{\omega_0^2}(1-\varepsilon) - 1\right] = 0. \tag{2.24}$$

Легко можно показать, что при $\varepsilon = 0$ (невозмущенная цепочка) $A = B$. Для возмущенной цепочки полагаем

$$A = \frac{C}{2}\exp(-i\delta), \quad B = \frac{C}{2}\exp(i\delta). \tag{2.25}$$

Из (2.23) и (2.24) получаем следующие уравнения:

$$s_n = C\cos(|n|qa - \delta) \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}\delta = \varepsilon \operatorname{tg}\frac{qa}{2}. \tag{2.26}$$

Это означает лишь незначительное изменение по сравнению с решениями для невозмущенной цепочки.

Важнее то, что теперь возможны решения для $\omega > \omega_0$. Тогда λ действительно и отрицательно! Одно из двух действительных решений (2.22) меньше единицы, другое (обратная величина) больше единицы. Оба дают одинаковый результат при перестановке A и B. Можно, следовательно, ограничиться одним решением и выбрать в качестве него (отрицательное) λ с $|\lambda| < 1$.

Теперь необходимо проводить различие между двумя случаями $n > 0$ и $n < 0$ в (2.21). В каждом из этих случаев один из двух членов расходится при $|n| \to \infty$. Соответствующая амплитуда должна тогда обращаться в нуль. Полагаем

$$s_n = A\lambda^n \text{ для } n > 0, \quad s_n = B\lambda^{-n} \text{ для } n < 0 \quad (|\lambda| < 1). \tag{2.27}$$