Если исключить смещение s_0 из двух уравнений (2.20) с $n=1$ и $n=-1$, остается соотношение между смещениями s_2, s_1, s_{-1}, s_{-2}. Если использовать в этом соотношении выражения (2.27), то найдем, что амплитуды A и B в (2.27) должны быть равны. Если затем подставить (2.27) в первое из уравнений (2.20), то получим

$$2\lambda+\frac{4\omega^2}{\omega_0^2}(1-\varepsilon)-2=0. \tag{2.28}$$

Это есть соотношение между λ, ω и ε. Частота ω может быть исключена с помощью (2.22). Тогда

$$(\lambda-1)\left[2-\frac{\lambda-1}{\lambda}(1-\varepsilon)\right]=0, \tag{2.29}$$

или, поскольку $\lambda\neq 1$,

$$\lambda=\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}. \tag{2.30}$$

Подстановка этого решения в (2.27) и (2.22) дает

$$s_n=s_0(-1)^n\left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^{|n|} \quad \text{и} \quad \omega^2=\frac{\omega_0^2}{1-\varepsilon}. \tag{2.31}$$

Это решение описывает колебание, в котором соседние шарики колеблются в противоположных направлениях (рис. 24). Смещения убывают с увеличением $|n|$. Колебание является локализованным!

Здесь следует обратить внимание на наше предположение, что λ отрицательно и $|\lambda|<1$. Согласно (2.30) это означает, что решение существует в области $\omega>\omega_0$, только если ε положительно и меньше единицы. Локализованные колебательные состояния возможны только тогда, когда масса M_0 возмущающего атома меньше массы M атома решетки.

Хотя этот одномерный пример и не применим во всех отношениях к трехмерному случаю, он показывает наиболее важные свойства локализованных колебаний решетки. Самый верхний уровень $\omega=\omega_0$ невозмущенного спектра расщепляется возмущением и сдвигается с увеличением $\varepsilon=(M-M_0)/M$ в сторону более высоких частот; колебание, которое в невозмущенном спектре является делокализованной плоской волной, становится локализованным.

Тот же самый результат можно получить другим путем, который легко можно обобщить применительно к трехмерному случаю. Предполагая $s_n\propto\exp(-i\omega t)$, записываем (2.19) в виде

$$-\omega^2 Ms_n-f(s_{n+1}+s_{n-1}-2s_n)=-M\varepsilon\omega^2 s_0\delta_{n0}\equiv F_n. \tag{2.32}$$

Это уравнение может быть прочитано как уравнение движения для